7/11/2017

Όρια / Συνέχεια Συναρτήσεων

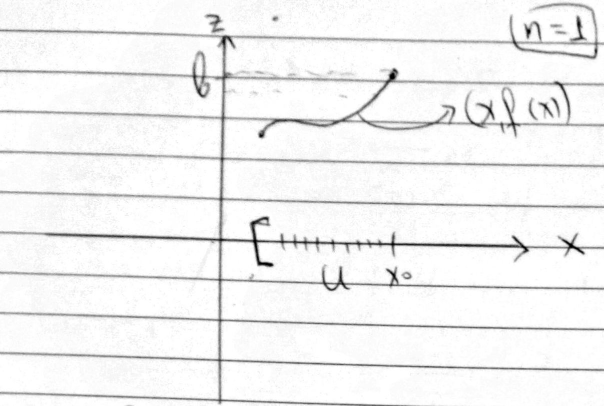
<u>Ορισμός</u> $U \subset \mathbb{R}^n$ $f : U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U.
Τότε $f(\bar{x}) \longrightarrow \ell$ για $\bar{x} \to \bar{x}_0$: $\Longleftrightarrow$

$\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \longrightarrow \bar{x}_0$ $f(\bar{x}_\nu) \longrightarrow \ell$ $\Longleftrightarrow$
$\ell - \varepsilon < f(\bar{x}_\nu) < \ell + \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$: « η f συγκλίνει στο ℓ στο σημείο $\bar{x}_0$ »

<u>Πρόταση</u> : $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \longrightarrow \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \longrightarrow \ell$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \underbrace{\bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \cap U \setminus \{x_0\}}_{\Longleftrightarrow \ \bar{x} \in U \ \wedge \ 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta} \ |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$$



$f(x) \longrightarrow \ell$ για $x \to x_0$
όπου $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$

[$\Longleftarrow$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ Θ.ν.δ.ο. $f(\bar{x}_\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \ell$

$\boxed{\text{Έστω } \varepsilon>0}$ (Θ.ν. βρω $\nu_0 \in \mathbb{N}$ με $\forall\, \nu \geq \nu_0$ $|f(\bar{x}_\nu)-\ell|<\varepsilon$) και $\delta>0$ αυτό της δεξιάς κάτω πλευράς στην πρόταση (το οποίο είναι υπόθεση). Τότε αφού $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ $\boxed{\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, \nu \geq \nu_0}$: $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \delta \xRightarrow[\bar{x}_\nu \in U\setminus\{\bar{x}_0\}]{}$

$\bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \delta) \cap U \setminus \{\bar{x}_0\} \xRightarrow[\text{υπόθεση}]{} \boxed{|f(\bar{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon}$

$\Longrightarrow$: (απαγωγή σε άτοπο) Έστω $\varepsilon_0 > 0$ έτσι ώστε $\forall\, \delta>0\ \exists\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0,\delta)\setminus\{\bar{x}_0\}$: $|f(\bar{x})-\ell| \geq \varepsilon$

$\xRightarrow[\delta=\frac{1}{\nu}]{} \forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, \bar{x}_\nu \in U \cap B(x_0, \tfrac{1}{\nu}) \setminus \{\bar{x}_0\}$: $|f(\bar{x}_\nu) - \ell| \geq \varepsilon_0$

$\Longrightarrow \exists\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $f(\bar{x}_\nu) \not\to \ell$

[αφού $f(\bar{x}_\nu) \to \ell \Longrightarrow \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \nu_0\ \forall\, \nu \geq \nu_0$ $|f(\bar{x}_\nu)-\ell|<\varepsilon$]

Το οποίο είναι άτοπο στην υπόθεση (αριστερά ή πάνω).

<u>Πρόταση</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U.
<u>Αν</u> $f(\bar{x}) \to \ell$ για $\bar{x} \to \bar{x}_0$, <u>τότε</u> το $\ell \in \mathbb{R}$ είναι μοναδικό. Και συμβολίζεται με $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell$.
(Απόδειξη, Άσκηση)

Παρατήρηση: (α) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \iff \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} |f(\bar{x}) - l| = 0$

(β) Αν $\bar{x}$ εσωτερικό σημείο τότε $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\eta\to 0} f(\bar{x}_0 + \bar{\eta})$

[(α) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}_0) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$

$\cap U \quad |f(\bar{x}) - l| < \varepsilon$

$= \big|\underbrace{|f(x) - l|}_{= g(x)} - 0\big|$

(β) Αν $\bar{x}_0$ εσωτ. σημ. του U τότε $\exists \delta_0 > 0 \ B(\bar{x}_0, \delta_0) \subset U$

και $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \overset{\text{ορισμός}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta)$

$\setminus \{\bar{x}_0\} \cap U \quad |f(\bar{x}) - l| < \varepsilon.$

$0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta$

$\underset{\bar{\eta} = \bar{x} - \bar{x}_0}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta \in (0, \delta_0) : \forall \ \underbrace{\bar{\eta} \in B(\bar{0}, \delta) \setminus \{\bar{0}\}}_{0 \le \|\bar{\eta}\| < \delta}$

$|\underbrace{f(\bar{x} + \bar{\eta})}_{= h(\bar{\eta})} - l| < \varepsilon$

$\iff \lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} \underbrace{h(\bar{\eta})}_{= f(\bar{x}_0, \bar{\eta})} = l$

Θεώρημα: Έστω $f, g : U \to \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του

U και $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$, $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x}) = m$

$\Rightarrow$ (α) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (f+g)(\bar{x}) = l + m$

(β) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (af)(\bar{x}) = al$, $a \in \mathbb{R}$.

(γ) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (f \cdot g)(\bar{x}) = l \cdot m$

(δ) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{l}{m}$, αν $m \neq 0$

(ε) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (h \circ f)(\bar{x}) = h(l)$ για $h : V \to \mathbb{R}$ όπου $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}$

και $\underbrace{h \text{ συνεχής συνάρτηση στο } \ell}$

$\Longleftrightarrow \forall (y_\nu) \subset V$ με $y_\nu \to \ell$: $\circledast\, h(y_\nu) \to h(\ell)$

<u>Απόδειξη (ε)</u> : $\boxed{\text{Έστω } (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}}$ με $\boxed{\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0} \Longrightarrow$

$\underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{\in f(U) \subset V} \to \ell$.

$y_\nu \overset{(*)}{\Longrightarrow} h(y_\nu) = h(f(\bar{x}_\nu)) = \boxed{(h \circ f)(\bar{x}_\nu) \longrightarrow h(\ell)}$

<u>Πόρισμα</u> Έστω $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell$. Τότε

(α) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} |f(\bar{x})| = |\ell|$ και (β) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \sqrt{|f(\bar{x})|} = \sqrt{|\ell|}$

[$h(y) = |y|$, $y \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $\bar{h}(y) = \sqrt{|y|}, y \in \mathbb{R}$

είναι συνεχής. Επίσης αφού η $\hat{h}(y) = ay$, $y \in \mathbb{R}$

συνεχής προκύπτει το (β) του θεωρήματος.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω ότι $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x$

Υπάρχει το $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ και αν ναι ποιο είναι.

<u>Λύση</u> Για να έχω $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

θα πρέπει για κάθε ακολουθία $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\neq (x_0,y_0)} \to (x_0, y_0)$ να έχω

$\underbrace{f(x_\nu, y_\nu)}_{= x_\nu} \to \ell$.

$\Longleftrightarrow x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0$

$\Longrightarrow \ell = x_0$

Άρα $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \underbrace{f(x,y)}_{= x} = x_0 = f(x_0, y_0)$

Αυτό γενικεύεται στο εξής: $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} x_i = a_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

όπου $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$

$(f(\bar{x}) = x_i)$ ονομάζονται προβολές (στον i άξονα).

[$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$].

<u>Ορισμός</u>: Η $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται

(α) συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$, αν $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

(β) συνεχής στο $A \subset U$, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$.

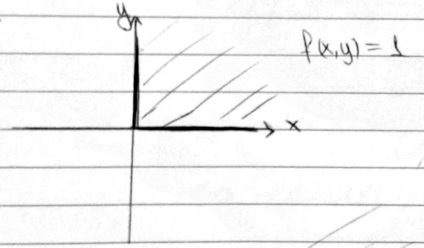
(γ) συνεχής, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in U$

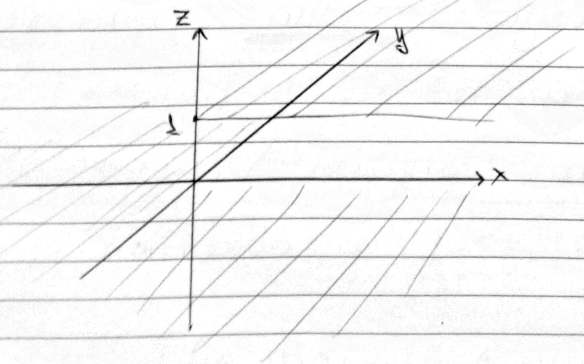
<u>Προσοχή</u> Άλλο λέει το (β) και άλλο το «$f|A : A \to \mathbb{R}$ συνεχής με $A \subset U$»

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ η } y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Πού είναι / δεν είναι συνεχής η f;

<u>Λύση</u>





(α) Στα σημεία $(x_0, y_0) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ η f είναι συνεχής αφού το $(0,\infty) \times (0,\infty)$ είναι ανοικτό (;)

$\exists\ \varepsilon > 0$ $B((x_0,y_0),\varepsilon) \subset (0,\infty) \times (0,\infty)$ και άρα $\forall$

$(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$ $\exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall\ \nu \geq \nu_0 : (x_\nu, y_\nu) \in B((x_0,y_0),\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \|(x_\nu - y_\nu) - (x_0, y_0)\| \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists\ \nu \geq \nu_0$ $(x_\nu, y_\nu) \in B((x_0,y_0),\varepsilon)$

$\subset (0,\infty) \times (0,\infty)$ $\qquad \subset (0,\infty) \times (0,\infty)$

$\Longrightarrow \forall \nu \geq \nu_0 \quad f(x_\nu, y_\nu) = 1 \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 1 = f(x_0, y_0)$

(β) Αντίστοιχα (j) για τα $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty) \times [0,\infty))$ έχουμε συνέχεια.
Μένουν τα σημεία $(x_0, 0)$, $x_0 \geq 0$
και (αντίστοιχα τα σημεία $(0, y_0)$, $y_0 \geq 0$
Για $(x_0, 0)$, $x_0 \geq 0$ έχουμε για $\left(x_0, \frac{1}{\nu}\right) \to (x_0, 0)$

$$\underbrace{f\left(x_0, \frac{1}{\nu}\right)}_{=1} \longrightarrow \underbrace{f(x_0, 0)}_{=1}$$

Αλλά αν πάρουμε $\left(x_0, -\frac{1}{\nu}\right) \to (x_0, 0)$

έχουμε $\underbrace{f\left(x_0, -\frac{1}{\nu}\right)}_{=0} \not\longrightarrow \overbrace{f(x, 0)}^{=1}$

$\longrightarrow 0$

[Προσοχή: Επειδή εξετάζουμε συνέχεια, όπου γνωρίζουμε ποιο θα πρέπει το όριο:
Αν θέλω να δείξω ασυνέχεια αρκεί να βρω μια ακολουθία $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ με $f(\bar{x}_\nu) \not\to f(\bar{x}_0)$]

Άρα σε όλα τα $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0\}$
$A = \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0\}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Στο παράδειγμα για $A = [0,\infty) \times [0,\infty)$ η $f|A : A \to \mathbb{R}$ είναι $f(x,y) = 1$